Έστω $(*)$ το προς λύση πρόβλημα και $< a_n \dots a_0 >$ η δεκαδική αναπαράσταση φυσικού αριθμού που αποτελεί λύση του $(*)$. Τότε θα ισχύει:

$$\frac{< a_n \dots a_0 >}{2} = < a_{n-1} \dots a_0 a_n >$$

θεωρώντας ότι

$$< a_n \dots a_0 > = \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i$$

Δηλ. θα ισχύει:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i = \sum_{i=0}^{n-1} 10^{i+1} a_i + a_n$$

ή μετά από λίγη Άλγεβρα:

$$\frac{10^n - 2}{19} a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 10^i a_i \qquad (1)$$

Έστω τώρα ο αριθμός $s_{n,k} =_{o\rho} 2\frac{10^{n+1}-1}{19}k$ με $n, k \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει το ακόλουθο

Λήμμα 1
$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, 19 \mid (10^n - 2) \Rightarrow \forall k \in \{1 \dots 9\}, s_{n,k}$: λύση του (*)
Απόδειξη
Έστω ότι ισχύει η υπόθεση και έστω τυχαίο $k \in \{1 \dots 9\}$. Τότε προφανώς ισχύει $\frac{19 \cdot 10^n}{20 \cdot 10^n - 2} < 1 \leq k$ καθώς και $\frac{19 \cdot 10^{n+1}}{2(10^{n+1}-1)} > 9.5 > k$ άρα ισχύει:

$$10^n \leq 2\frac{10^{n+1} - 1}{19}k < 10^{n+1}$$

δηλ. ο αριθμός $s_{n,k}$ έχει $n+1$ ψηφία.
Έστω λοιπόν $s_{n,k} = < s_n \dots s_0 >$. Τότε ισχύει $0 \leq \frac{10^n-2}{19}k$ καθώς και $\frac{19 \cdot 10^n}{10^n - 2} > 19 > k$ άρα:

$$k10^n \leq 2\frac{10^{n+1} - 1}{19}k < (k+1)10^n$$

κι έτσι ο αριθμός $s_{n,k}$ έχει ως πρώτο ψηφίο τον αριθμό k
δηλ. $s_{n,k} = < k, s_{n-1} \dots s_0 >$.
Τότε, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 10^i s_i = s_{n,k} - 10^n k = \frac{10^n - 2}{19}k$$

δηλ. ισχύει η (1), άρα $s_{n,k}$: λύση του (*)

$\square$

Για να λύσουμε λοιπόν το $(*)$ αρκεί να αναζητήσουμε, αν υπάρχουν, $n \in \mathbb{N}$ τ.π. $19 \mid (10^n - 2)$.
Ένα πρόγραμμα σε Mathematica που αναζητεί τέτοια n μεταξύ 2 και 60 και που εμφανίζει τις αντίστοιχες λύσεις $s_{n,k}$ μπορεί να είναι το εξής:

```
For[i = 2, i <= 60,
    If [Mod[10^i - 2, 19] = = 0,
        x = 2*(10^(i + 1) - 1)/19;
        For[j = 1, j <= 9,
            y = j*x;
            Print[y];
            j++]
        ];
    i++]
```

Όντως υπάρχουν τέτοια n και το Mathematica εμφανίζει τις ακόλουθες λύσεις:

```
105263157894736842
210526315789473684
315789473684210526
421052631578947368
526315789473684210
631578947368421052
736842105263157894
842105263157894736
947368421052631578
105263157894736842105263157894736842
210526315789473684210526315789473684
315789473684210526315789473684210526
421052631578947368421052631578947368
526315789473684210526315789473684210
631578947368421052631578947368421052
736842105263157894736842105263157894
842105263157894736842105263157894736
947368421052631578947368421052631578
105263157894736842105263157894736842105263157894736842
210526315789473684210526315789473684210526315789473684
315789473684210526315789473684210526315789473684210526
421052631578947368421052631578947368421052631578947368
526315789473684210526315789473684210526315789473684210
631578947368421052631578947368421052631578947368421052
736842105263157894736842105263157894736842105263157894
842105263157894736842105263157894736842105263157894736
947368421052631578947368421052631578947368421052631578
```

Εν πρώτεις, βλέπουμε ότι ο αριθμός 18 ψηφίων:
105263157894736842 *αποτελεί λύση στο πρόβλημά μας.*

Παίρνοντας όμως αφορμή από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να αποδείξουμε τις Προτάσεις 1 και 2:

Πρόταση 1
$s =< s_n \ldots s_0 >$: λύση του $(*)$ ανν
$s = s_{n,s_n}$ με $18 \mid (n+1)$
Απόδειξη
$(\Rightarrow)$
Επειδή ο αριθμός s αποτελεί λύση στο πρόβλημα, θα ισχύει η (1) άρα:

$$s = 10^n s_n + \frac{10^n - 2}{19} s_n = 2\frac{10^{n+1} - 1}{19} s_n = s_{n,s_n}$$

και φυσικά $19 \mid (10^{n+1} - 1)$ ή αλλιώς

$$10^{n+1} \equiv 1 \pmod{19} \tag{2}$$

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω προγράμματος προκύπτει ότι $n+1 \geq 18$
Αν $n+1 = 18$ τότε το ζητούμενο έπεται αμέσως.
Αν $n+1 > 18$ τότε έστω, προς άτοπο, ότι $18 \nmid (n+1)$. Τότε θα υπάρχουν $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και $l \in \mathbb{N}$ με $0 < l < 18$ τ.π. $n+1 = 18k + l$.
Όμως, από την πρώτη λύση του παραπάνω προγράμματος προκύπτει ότι $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ άρα $(10^{18})^k \equiv 1 \pmod{19}$
Έστω τώρα $10^l \equiv a \pmod{19}$. Τότε $10^{n+1} = 10^{18k+l} \equiv a \pmod{19}$ άρα, από (2), $a = 1$ δηλ. $10^l \equiv 1 \pmod{19}$. Πράγμα άτοπο, από τα αποτελέσματα του παραπάνω προγράμματος και επειδή $l \in \mathbb{N}$ με $0 < l < 18$.
Άρα $18 \mid (n+1)$ κι έτσι προκύπτει το ζητούμενο.
$(\Leftarrow)$
Έστω $s = s_{n,s_n}$ με $18 \mid (n+1)$. Τότε:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 10^i s_i = s_{n,s_n} - 10^n s_n = \frac{10^n - 2}{19} s_n$$

δηλ. ισχύει η (1), άρα s_{n,s_n}: λύση του (*)

$\square$

Έστω τώρα ο συμβολισμός $< a_n \ldots a_0 >^m$, οποίος ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
$< a_n \ldots a_0 >^0 =<>$
$< a_n \ldots a_0 >^{m+1} =< a_n \ldots a_0 >^m \circ < a_n \ldots a_0 >$ με $m \in \mathbb{N}$
όπου $< b_k \ldots b_0 > \circ < a_n \ldots a_0 > =< b_k \ldots b_0 a_n \ldots a_0 >$
Τότε ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 2
Κάθε λύση $s =< s_n \ldots s_0 >$ της $(*)$ ταυτίζεται με κάποιον από τους αριθμούς:
$< 105263157894736842 >^m$
$< 210526315789473684 >^m$
$< 315789473684210526 >^m$
$< 421052631578947368 >^m$
$< 526315789473684210 >^m$
$< 631578947368421052 >^m$
$< 736842105263157894 >^m$
$< 842105263157894736 >^m$
$< 947368421052631578 >^m$
με $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Απόδειξη
Από Πρόταση 1 θα ισχύει $s = s_{n,s_n} = 2\frac{10^{n+1}-1}{19}s_n$ με $18 \mid (n+1)$.
Όμως ισχύει και το εξής:

$$(10^{18}-1)\sum_{i=0}^{\frac{n+1}{18}-1} 10^{18i} = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{18}} 10^{18i} - \sum_{i=0}^{\frac{n+1}{18}-1} 10^{18i} = 10^{n+1}-1$$

Άρα ισχύει:

$$s = 2\frac{10^{18}-1}{19}s_n \sum_{i=0}^{\frac{n+1}{18}-1} 10^{18i} = \sum_{i=0}^{\frac{n+1}{18}-1} (10^{18i}s_{17,s_n})$$

Αν θέσουμε δε, $t_{s_n} =_{o\rho} s_{17,s_n} =< s_n t_{16} \ldots t_0 >$ θα ισχύει:

$$s =< s_n t_{16} \ldots t_0 >^{\frac{n+1}{18}}$$

Αφού δε, οι μοναδικές λύσεις του $(*)$ με 18 ψηφία είναι οι παραπάνω εννέα και ο s_{17,s_n} αποτελεί λύση (λόγω Λήμματος 1, επειδή $19 \mid (10^{17}-2)$) και έχει 18 ψηφία, προκύπτει το ζητούμενο.

$\square$